

Princípios Aditivo e Multiplicativo

Raquel de Souza Francisco Bravo

[e-mail: raquelbr.ic@gmail.com](mailto:raquelbr.ic@gmail.com)

08 de setembro de 2016

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Conteúdo:

➔ Princípios básicos de contagem:

= Princípio Aditivo

= Princípio Multiplicativo

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Objetivos:

- ➔ Desenvolver as idéias e técnicas básicas para problemas de contagem.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Objetivos:

- ➔ Desenvolver as idéias e técnicas básicas para problemas de contagem.
- ➔ Reduzir um problema grande a vários problemas pequenos, usando os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Importância:

➔ Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Importância:

- ➡ Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.
- ➡ Muitas vezes estamos apenas interessados em contar os elementos de um determinado conjunto, sem enumerá-los.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Importância:

- ➔ Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.
- ➔ Muitas vezes estamos apenas interessados em contar os elementos de um determinado conjunto, sem enumerá-los.
- ➔ No desenvolvimento de técnicas de contagem que veremos mais adiante, tais como: permutações, combinações, etc, estaremos usando basicamente os **Princípios Aditivo e Multiplicativo**.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

➔ Problemas de contagem:

Exemplo 1:

- = Dados quatro livros distintos de **Matemática** (M_1, M_2, M_3, M_4) e três livros distintos de **Português** (P_1, P_2, P_3), de quantas maneiras podemos selecionar (escolher):
- Um livro (ou de Matemática ou de Português).
 - Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

O livro de **Matemática** pode ser escolhido de 4 maneiras

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

O livro de **Matemática** pode ser escolhido de 4 maneiras

livro M_1 ou

livro M_2 ou

livro M_3 ou

livro M_4

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

O livro de **Matemática** pode ser escolhido de 4 maneiras

livro M_1 ou

livro M_2 ou

livro M_3 ou

livro M_4

O livro de **Português** pode ser escolhido de 3 maneiras:

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

O livro de **Matemática** pode ser escolhido de 4 maneiras

livro M_1 ou

livro M_2 ou

livro M_3 ou

livro M_4

O livro de **Português** pode ser escolhido de 3 maneiras:

livro P_1 ou

livro P_2 ou

livro P_3

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

a) Um livro (ou de Matemática ou de Português)

O livro de **Matemática** pode ser escolhido de 4 maneiras

livro M_1 ou

livro M_2 ou

livro M_3 ou

livro M_4

O livro de **Português** pode ser escolhido de 3 maneiras:

livro P_1 ou

livro P_2 ou

livro P_3

Número de maneiras: $4 + 3 = 7$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

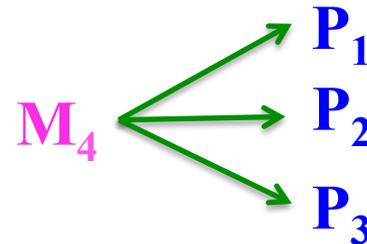
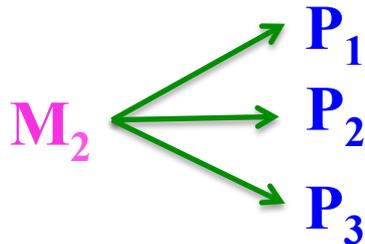
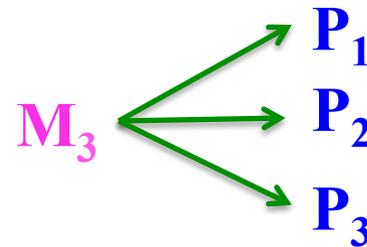
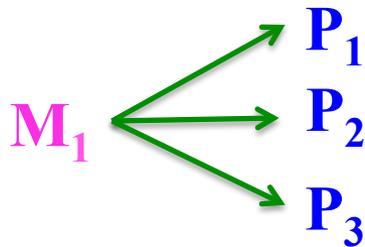
Exemplo 1 (continuação):

b) Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Temos dois conjuntos:

$$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

$$B = \{P_1, P_2, P_3\}$$



Princípio Aditivo e Multiplicativo

➡ Resumindo

a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Princípio Aditivo e Multiplicativo

➔ Resumindo

a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Resposta:

Temos 4 maneiras de escolher um livro de Matemática e 3 maneiras de escolher um livro de Português.

Logo temos $4 + 3 = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer dentre os de Matemática e Português.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

b) De quantas maneiras podemos escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Resposta:

Para cada livro de Matemática, temos 3 maneiras de escolher os livros de Português.

Como temos 4 maneiras de escolher os livros de Matemática, teremos $3 \times 4 = 12$ maneiras de escolher um livro de Matemática e outro de Português.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2:

- Maria vai a uma papelaria para comprar **lapiseira** e **borracha**. Nessa papelaria há **7** tipos diferentes de lapiseiras e **5** tipos diferentes de borrachas.
- a)** Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2:

— Maria vai a uma papelaria para comprar **lapiseira** e **borracha**. Nessa papelaria há **7** tipos diferentes de lapiseiras e **5** tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\}$$

$$B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2:

— Maria vai a uma papelaria para comprar **lapiseira** e **borracha**. Nessa papelaria há **7** tipos diferentes de lapiseiras e **5** tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\} \quad B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

ou L_1 , ou L_2 , ou ... ou $L_7 \rightarrow$ **7 maneiras**

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2:

— Maria vai a uma papelaria para comprar **lapiseira** e **borracha**. Nessa papelaria há **7** tipos diferentes de lapiseiras e **5** tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\} \quad B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

ou L_1 , ou L_2 , ou ... ou L_7 → **7 maneiras**

ou B_1 , ou B_2 , ou ... ou B_5 → **5 maneiras**

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2:

— Maria vai a uma papelaria para comprar **lapiseira** e **borracha**. Nessa papelaria há **7** tipos diferentes de lapiseiras e **5** tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\} \quad B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

ou L_1 , ou L_2 , ou ... ou $L_7 \rightarrow$ **7 maneiras**

ou B_1 , ou B_2 , ou ... ou $B_5 \rightarrow$ **5 maneiras**

Número de maneiras de escolher um item : **$7 + 5 = 12$**

Princípio Aditivo e Multiplicativo

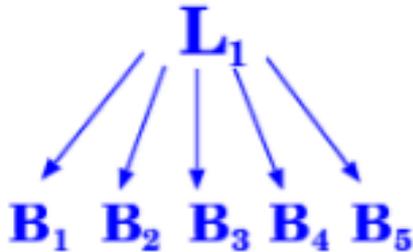
Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

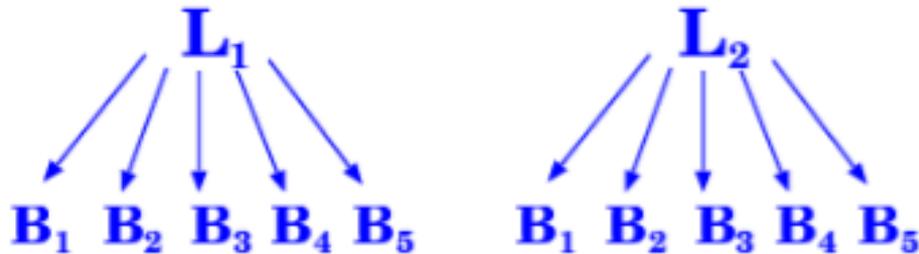
b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

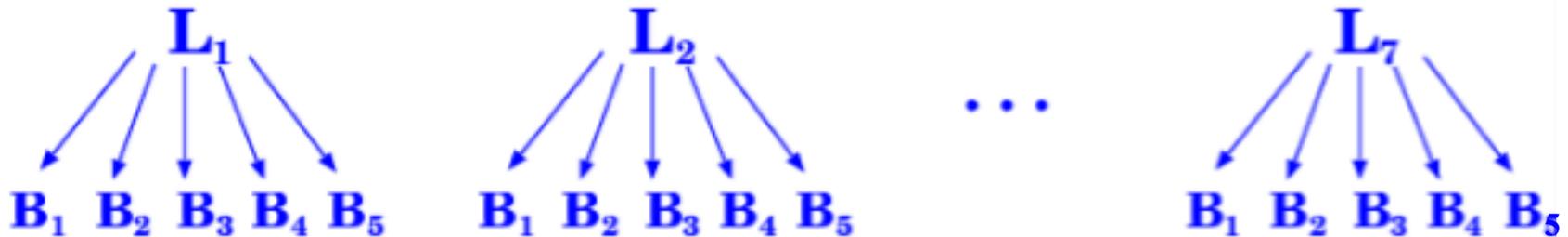
b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

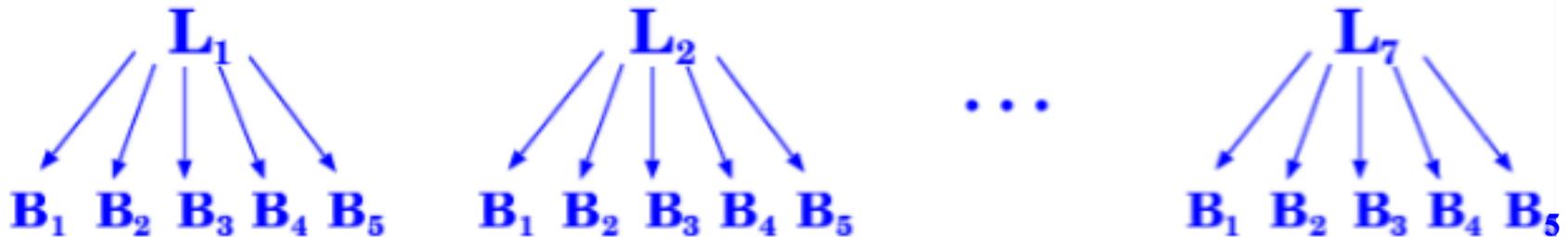
b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



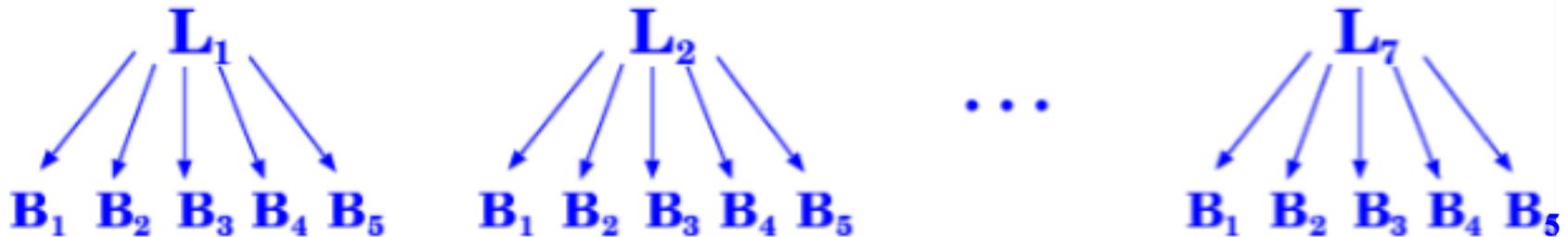
Observe que temos os pares:

$(L_1, B_1) (L_1, B_2) \dots (L_1, B_5) , \dots , (L_7, B_1) (L_7, B_2) \dots (L_7, B_5)$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Observe que temos os pares:

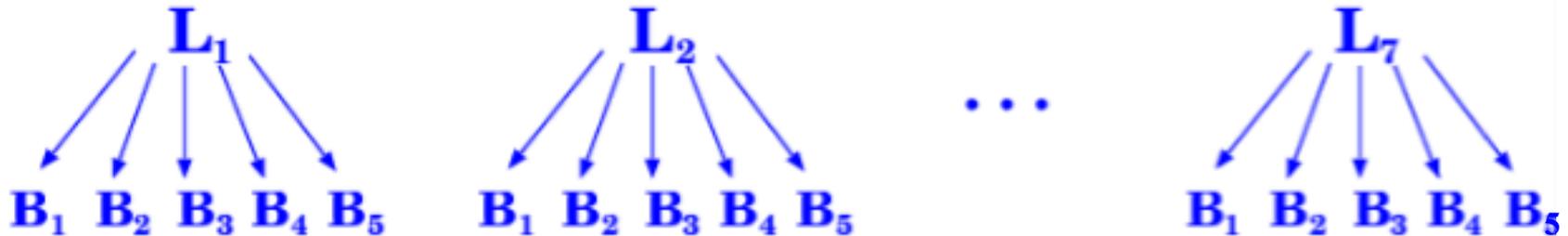
$(L_1, B_1) (L_1, B_2) \dots (L_1, B_5) , \dots , (L_7, B_1) (L_7, B_2) \dots (L_7, B_5)$

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e o outro uma borracha

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Observe que temos os pares:

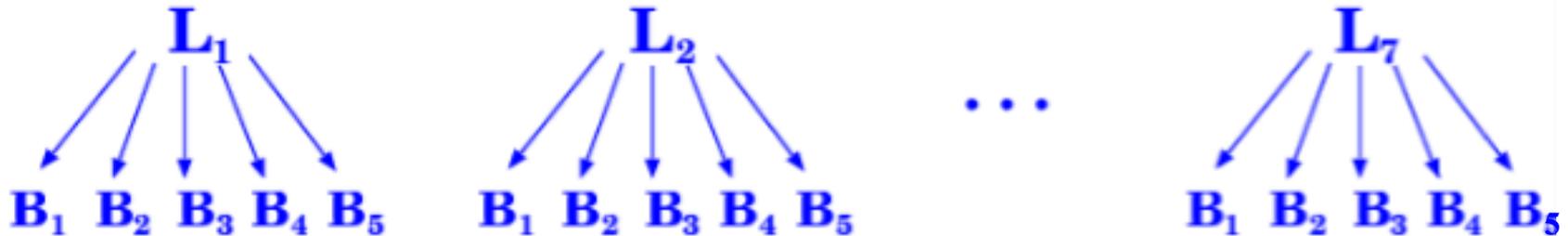
$(L_1, B_1) (L_1, B_2) \dots (L_1, B_5) , \dots , (L_7, B_1) (L_7, B_2) \dots (L_7, B_5)$

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e o outro uma borracha $5 + 5 + \dots + 5$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 2 (continuação):

b) Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?



Observe que temos os pares:

(L_1, B_1) (L_1, B_2) ... (L_1, B_5) , ... , (L_7, B_1) (L_7, B_2) ... (L_7, B_5)

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e o outro uma borracha $5 + 5 + \dots + 5 = 5 \times 7 = 35$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

➔ Resumindo

a) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar um item (ou um lapiseira ou um borracha)?

Resposta:

Ela tem 7 possibilidades de escolha de lapiseira e 5 possibilidades de escolha de borracha.

Logo Maria tem $7 + 5$ possibilidades diferentes de comprar ou uma lapiseira ou uma borracha.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

b) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar 2 itens: uma lapiseira e uma borracha?

Resposta:

Para cada escolha de lapiseira, ela tem 5 escolhas de borracha.

Como ela tem 7 escolhas de lapiseiras diferentes, ela terá 7×5 maneiras diferentes de comprar uma lapiseira e uma borracha.

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

⇒ **Princípio Aditivo** (para dois conjuntos)

Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),
então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

⇒ **Princípio Aditivo** (para dois conjuntos)

Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),
então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

⇒ Outra notação usual

$$n(A) = |A|$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

➔ **Princípio Aditivo** (para dois conjuntos)

Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),
então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

➔ Outra notação usual

$$n(A) = |A|$$

$$n(B) = |B|$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

➔ **Princípio Aditivo** (para dois conjuntos)

Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),
então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

➔ Outra notação usual

$$n(A) = |A|$$

$$n(B) = |B|$$

$$n(A \cup B) = |A \cup B| = |A| + |B|$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

➔ Outra interpretação da formulação:

- Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos. Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e outro evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m + n$ maneiras em que algum desses dois eventos podem ocorrer.

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 1:

- ⇒ Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:
 - a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 1:

= Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:

a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

Podemos identificar os conjuntos:

$$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} \quad B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 1:

= Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:

a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

Podemos identificar os conjuntos:

$$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} \quad B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad |A| = n(A) = 4 \quad |B| = n(B) = 3$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 1:

= Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:

a) De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

Podemos identificar os conjuntos:

$$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} \quad B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad |A| = n(A) = 4 \quad |B| = n(B) = 3$$

Pelo P. A. temos

$|A \cup B| = |A| + |B| = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer, ou de Matemática ou de Português.

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 2:

- ⇒ Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:
- a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 2:

⇒ Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\}$$

$$B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 2:

⇒ Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\} \quad B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

$$L \cap B = \emptyset \quad |L| = 7 \quad |B| = 5$$

Introdução ao Princípio Aditivo (PA)

Voltando ao exemplo 2:

⇒ Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:

a) De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_7\} \quad B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$$

$$L \cap B = \emptyset \quad |L| = 7 \quad |B| = 5$$

Pelo P. A. Maria tem

$|L \cup B| = |L| + |B| = 7 + 5 = 12$ maneiras de escolher ou uma lapiseira ou uma borracha.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

⇒ **Princípio Multiplicativo** (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

tem $m \times n$ elementos

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

⇒ **Princípio Multiplicativo** (para dois conjuntos)

Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

tem $m \times n$ elementos

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \times n$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

➔ Outra interpretação da formulação:

- Se um evento **A** pode ocorrer de **m** maneiras e um evento **B** pode ocorrer de **n** maneiras então o par de eventos, primeiro um e depois o outro, podem ocorrer de **$m \times n$** maneiras.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Voltando ao exemplo 1:

- ▬ Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:
 - b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:
 - b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

$$\begin{aligned} A &= \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} & B &= \{ P_1, P_2, P_3 \} \\ |A| &= 4 & |B| &= 3 \end{aligned}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Voltando ao exemplo 1:

- ⇒ Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:
- b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

$$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} \quad B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$
$$|A| = 4 \quad |B| = 3$$

Pelo P.M. temos então:

$|A \times B| = |A| \times |B| = 4 \times 3 = 12$ maneiras de escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Voltando ao exemplo 1:

- ⇒ Dados quatro livros distintos de **Matemática** e três livros distintos de **Português**:
- b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

$$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} \quad B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$
$$|A| = 4 \quad |B| = 3$$

Pelo P.M. temos então:

$|A \times B| = |A| \times |B| = 4 \times 3 = 12$ maneiras de escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português.

Exercício: Interpretação do **exercício 2 b)**.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:
 - a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3:

– Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \} \quad |A| = 8$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3:

— Um prédio tem oito portas:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \} \quad |A| = 8$$

$(P_1, P_1), (P_1, P_2) \dots (P_1, P_7), (P_1, P_8)$

$(P_2, P_1), (P_2, P_2) \dots (P_2, P_7), (P_2, P_8)$

\vdots

\vdots

\vdots

\vdots

$(P_8, P_1), (P_8, P_2) \dots (P_8, P_7), (P_8, P_8)$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\begin{array}{cccc} (P_1, P_2), (P_1, P_3) \dots (P_1, P_7), (P_1, P_8) \\ (P_2, P_1), (P_2, P_3) \dots (P_2, P_7), (P_2, P_8) \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ (P_8, P_1), (P_8, P_2) \dots (P_8, P_6), (P_8, P_7) \end{array}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left. \begin{array}{l} (P_1, P_2), (P_1, P_3) \dots (P_1, P_7), (P_1, P_8) \\ (P_2, P_1), (P_2, P_3) \dots (P_2, P_7), (P_2, P_8) \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ (P_8, P_1), (P_8, P_2) \dots (P_8, P_6), (P_8, P_7) \end{array} \right\} 8 \times 7$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left. \begin{array}{l} (P_1, P_2), (P_1, P_3) \dots (P_1, P_7), (P_1, P_8) \\ (P_2, P_1), (P_2, P_3) \dots (P_2, P_7), (P_2, P_8) \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ (P_8, P_1), (P_8, P_2) \dots (P_8, P_6), (P_8, P_7) \end{array} \right\} 8 \times 7$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por uma outra diferente de **56** maneiras.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \} , |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1), \dots, (P_8, P_8) \} , |D| = 8$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \}, \quad |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1), \dots, (P_8, P_8) \}, \quad |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \}, \quad |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1), \dots, (P_8, P_8) \}, \quad |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

$$|C| = |A \times A| - |D| \quad (\text{Princípio Aditivo})$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \} , |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1), \dots, (P_8, P_8) \} , |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

$$|C| = |A \times A| - |D| \quad (\text{Princípio Aditivo})$$

$$|C| = |A| \cdot |A| - |D| \quad (\text{Princípio Multiplicativo})$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Formalização:

$$A = \{ P_1, P_2, \dots, P_8 \}, \quad |A| = 8$$

$$D = \{ (P_1, P_1), \dots, (P_8, P_8) \}, \quad |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

$$|C| = |A \times A| - |D| \quad (\text{Princípio Aditivo})$$

$$|C| = |A| \cdot |A| - |D| \quad (\text{Princípio Multiplicativo})$$

$$= 8 \times 8 - 8 = 8(8 - 1) = 8 \cdot 7$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

- a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?
maneiras de entrar - 8

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

maneiras de entrar - 8

maneiras de sair - 8

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} \quad - \quad 8 \\ \text{maneiras de sair} \quad \quad - \quad 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 8 \times 8 = 64$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} \quad - \quad 8 \\ \text{maneiras de sair} \quad \quad - \quad 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 8 \times 8 = 64$$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} - 8 \\ \text{maneiras de sair} - 8 \end{array} \Rightarrow 8 \times 8 = 64$$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

$$\text{maneiras de entrar} - 8$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} - 8 \\ \text{maneiras de sair} - 8 \end{array} \Rightarrow 8 \times 8 = 64$$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} - 8 \\ \text{maneiras de sair} - 7 \end{array}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

⇒ Interpretação:

a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} - 8 \\ \text{maneiras de sair} - 8 \end{array} \Rightarrow 8 \times 8 = 64$$

b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

$$\begin{array}{l} \text{maneiras de entrar} - 8 \\ \text{maneiras de sair} - 7 \end{array} \Rightarrow 8 \times 7 = 56$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4:

— Numa sala estão reunidos cinco **homens**, seis **mulheres** e quatro **crianças**.

De quantas maneiras podemos selecionar:

a) uma pessoa?

b) um homem, uma mulher e uma criança?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

$$H \cap M = \emptyset \quad H \cap C = \emptyset \quad M \cap C = \emptyset$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

$$H \cap M = \emptyset \quad H \cap C = \emptyset \quad M \cap C = \emptyset$$

$$|H| = 5 \quad |M| = 6 \quad |C| = 4$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

$$H \cap M = \emptyset \quad H \cap C = \emptyset \quad M \cap C = \emptyset$$

$$|H| = 5 \quad |M| = 6 \quad |C| = 4$$

$$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \}$$

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \}$$

$$C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$$

$$H \cap M = \emptyset \quad H \cap C = \emptyset \quad M \cap C = \emptyset$$

$$|H| = 5 \quad |M| = 6 \quad |C| = 4$$

$$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$$

$$H \cup M \cup C = \{ h_1, h_2, \dots, h_5, m_1, m_2, \dots, m_6, c_1, \dots, c_4 \}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H, m \in M, c \in C \}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H, m \in M, c \in C \}$$

$$H \times M \times C = \{ (h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1), \\ (h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1), \\ (h_1, m_{b_1}, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \dots \}$$

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 4 (continuação):

b) De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{ (h, m, c) \mid h \in H, m \in M, c \in C \}$$

$$H \times M \times C = \{ (h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1), \\ (h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1), \\ (h_1, m_{b_1}, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \dots \}$$

= Observação:

$$|H \times M \times C| = |H| \times |M| \times |C| = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

Extensão do Princípio Aditivo

⇒ Se A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j)$$

$$\text{e } |A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ elementos

Extensão do Princípio Aditivo

⇒ Se A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j)$$

$$\text{e } |A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ elementos

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^n m_i$$

Extensão do Princípio Aditivo

⇒ Outra interpretação da formulação:

- Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos mutuamente exclusivos. Se cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ maneiras em que algum desses n eventos podem ocorrer.

Extensão do Princípio Multiplicativo

= Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$

Extensão do Princípio Multiplicativo

= Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n| = \prod_{i=1}^n m_i$$

Extensão do Princípio Multiplicativo

⇒ Outra interpretação da formulação:

- ⇒ Se temos n eventos A_1, A_2, \dots, A_n , onde cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ maneiras em que esses n eventos podem ocorrer sucessivamente.

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

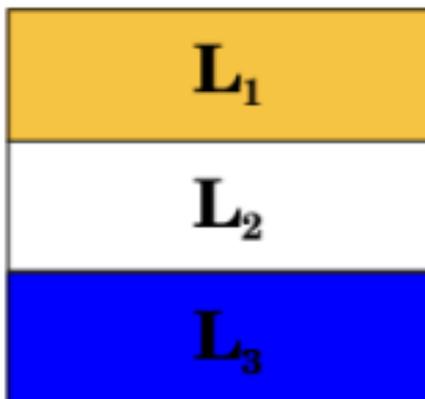
De quantos modos podemos colorir esta bandeira?

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?

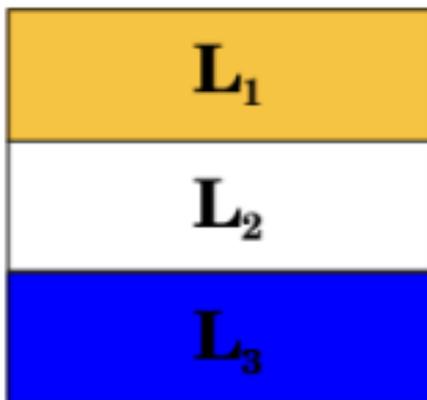


Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



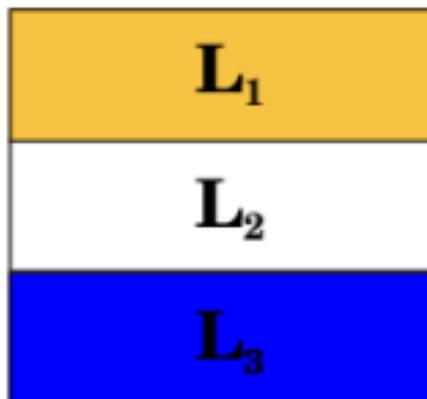
→ L_1 pode ser colorida de 3 modos

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



→ L_1 pode ser colorida de 3 modos

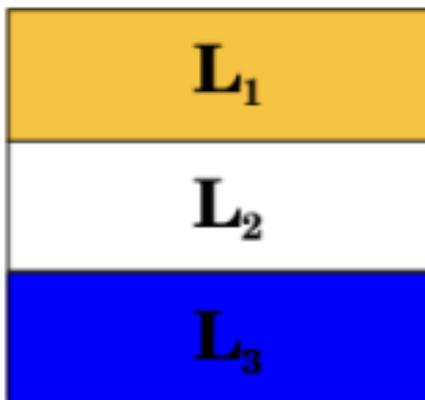
→ L_2 pode ser colorida de 2 modos

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



→ L_1 pode ser colorida de 3 modos

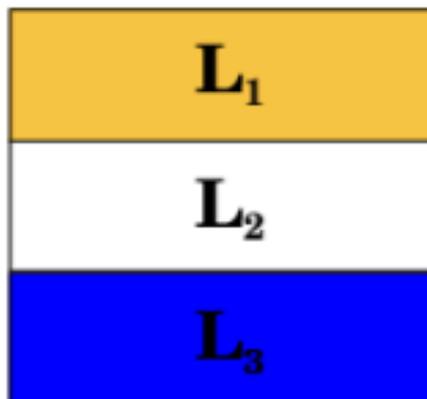
→ L_2 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_1 não pode ser usada em L_2)

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



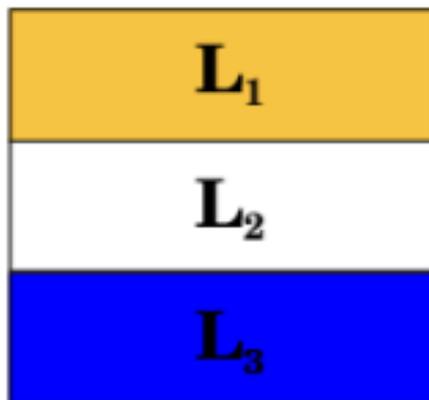
- L_1 pode ser colorida de 3 modos
- L_2 pode ser colorida de 2 modos (a cor usada em L_1 não pode ser usada em L_2)
- L_3 pode ser colorida de 2 modos

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



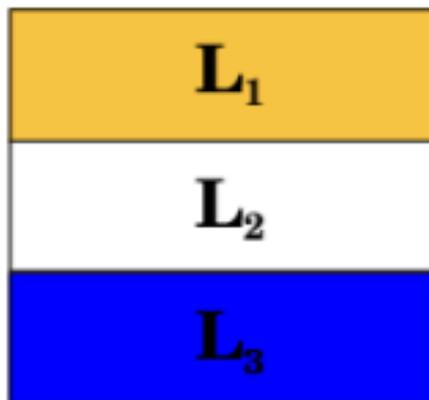
- L_1 pode ser colorida de 3 modos
- L_2 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_1 não pode ser usada em L_2)
- L_3 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_2 não pode ser usada em L_3)

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



- L_1 pode ser colorida de 3 modos
- L_2 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_1 não pode ser usada em L_2)
- L_3 pode ser colorida de 2 modos
(a cor usada em L_2 não pode ser usada em L_3)

Logo pelo PM temos **3 x 2 x 2 modos** de colorir esta bandeira.

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Resposta:

Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta:

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Resposta:

Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta:
Verdadeiro ou Falso

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeira ou Falsa.

Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Resposta:

Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta:
Verdadeiro ou Falso

P_1 – 2 possibilidades

P_2 – 2 possibilidades

\vdots $\quad \quad \quad \vdots$

P_{20} – 2 possibilidades

Logo pelo PM temos

$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{20}$ gabaritos

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

P₁ P₂ P₃

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7:

- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

$$\begin{array}{ccc} \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P_1 - \text{posição das centenas} \\ P_2 - \text{posição das dezenas} \\ P_3 - \text{posição das unidades} \end{array} \right.$$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7 (continuação):

— Exemplo de um número formado

3 6 5

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7 (continuação):

⇒ Exemplo de um número formado

3 6 5

P₁

P₂

P₃

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7 (continuação):

Exemplo de um número formado

3 6 5

P_1

↓ 1°

6

possibilidades

P_2

P_3

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7 (continuação):

Exemplo de um número formado

3 6 5

P_1

↓ 1º

6

possibilidades

P_2

↓ 2º

5

possibilidades

P_3

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7 (continuação):

Exemplo de um número formado

3 6 5

P_1

↓ 1°

6

possibilidades

P_2

↓ 2°

5

possibilidades

P_3

↓ 3°

4

possibilidades

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 7 (continuação):

Exemplo de um número formado

3 6 5

P_1

↓ 1°

6

possibilidades

P_2

↓ 2°

5

possibilidades

P_3

↓ 3°

4

possibilidades

Logo pelo PM temos $6 \times 5 \times 4 = 120$ números naturais de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

— Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ... , 9.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

— Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ..., 9.

P₁ P₂ P₃

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ..., 9.

P₁ P₂ P₃

Na posição P_1 temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ..., 9.

P₁ P₂ P₃

Na posição P₁ temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P₂ temos 9 possibilidades (diferentes do anterior)

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ..., 9.

P₁ P₂ P₃

Na posição P₁ temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P₂ temos 9 possibilidades (diferentes do anterior)

Na posição P₃ temos 8 possibilidades (diferente do dois anteriores)

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Observação: Estamos considerando agora os algarismos 0, 1, 2, ..., 9.

P₁ P₂ P₃

Na posição P₁ temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)

Na posição P₂ temos 9 possibilidades (diferentes do anterior)

Na posição P₃ temos 8 possibilidades (diferente do dois anteriores)

Logo pelo PM temos $9 \times 9 \times 8$ números naturais de três algarismos distintos.

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

— E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1 , começássemos pela P_3 ?

$\begin{array}{ccc} 3^\circ & 2^\circ & 1^\circ \\ \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array}$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_1 temos 8 (se o algarismo zero já tiver sido usado)

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analisando a posição P_1 , começássemos pela P_3 ?

$$\begin{array}{ccc} 3^\circ & 2^\circ & 1^\circ \\ \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)

Na posição P_1 temos $\left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ (se o algarismo zero já tiver sido usado)} \\ \text{ou} \\ 7 \text{ (caso contrário)} \end{array} \right.$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

P_1 P_2 P_3

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Exemplo 8 (continuação):

⇒ Quebramos o problema em dois:

1º) Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

Na posição P_3 temos 10 possibilidades

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ números de três algarismos distintos onde o zero pode estar na posição P

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline & & \end{array}$$

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline & & \end{array}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\begin{array}{ccc} \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\begin{array}{ccc} \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\begin{array}{ccc} \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

Princípio Aditivo e Multiplicativo

2º) Contamos os números de três algarismos distintos que têm apenas o zero na posição P_1

$$\begin{array}{ccc} \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} \end{array}$$

Na posição P_1 temos 1 possibilidade

Na posição P_2 temos 9 possibilidades

Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

Temos então $720 - 72 = 648$ números naturais de três algarismos distintos.